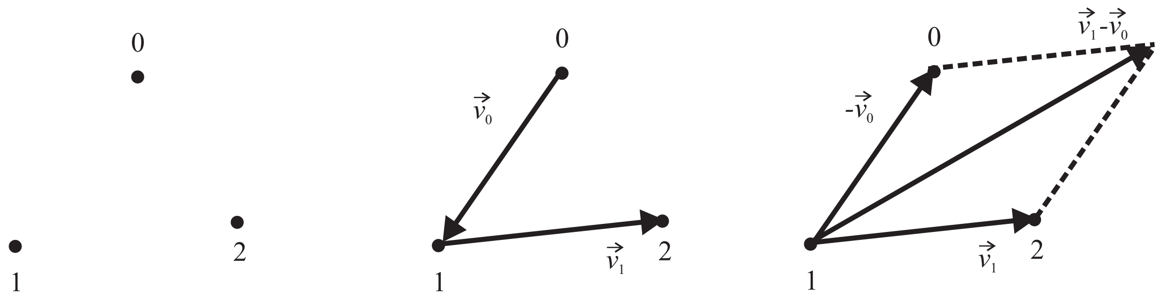
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Física

Física I -2009/2010

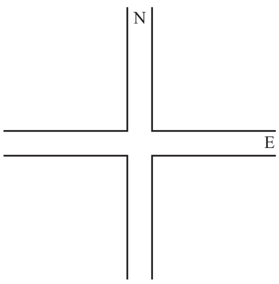
4ª Série - Movimento bi- e tridimensional - Resolução

Questões:

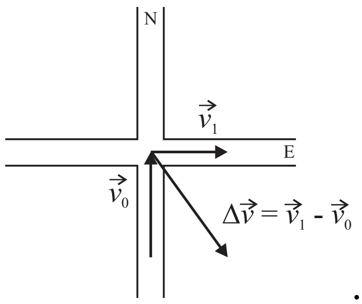
Q1 - A figura mostra as posições de um objecto em movimento, em instantes de tempo sucessivos Desenhe e identifique o vector velocidade média $\vec{v}_0$ para o moviemento entre 0 e 1, e o vector velocidade média $\vec{v}_1$ para o movimento de 1 a 2. Em seguida, desenhe o vector $\vec{v}_1 - \vec{v}_0$, aplicado no ponto 1.



Q2 - Um automóvel ligeiro entra numa cruzamento em que xiste óleo no pavimento, movendo-se a 16 m/s no sentido Sul-Norte. Depois de uma violenta colisão com um camião, o automóvel desliza com velocidade de módulo 12 m/s no sentido oeste-leste.

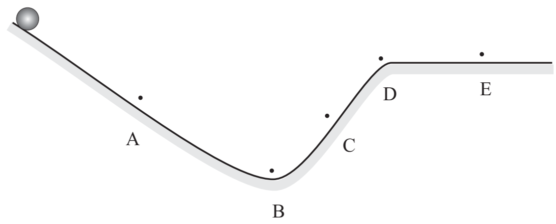


Desenhe na figura os vectores que representam as seguintes grandezas:
a) A velocidade, $\vec{v}_0$, do automóvel, quando entra no cruzamento;
b) A velocidade, $\vec{v}_1$, do automóvel, quando deixa o cruzamento;
c) A variação da velocidade ao automóvel, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$, resultante da colisão

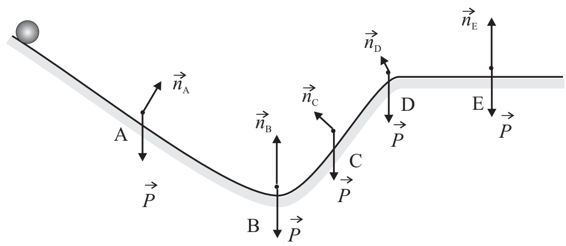


.

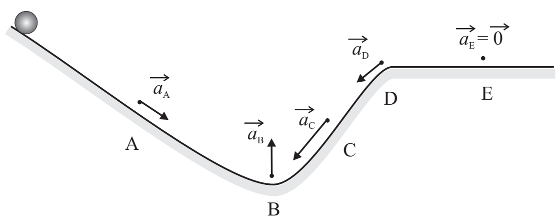
Q3 - A figura mostra uma rampa e uma bola que rola sobre essa rampa. Desenhe na figura os vectores aceleração da bola nos pontos assinalados por letras, de A a E, (ou escreva $\vec{a} = \vec{0}$, onde for apropriado.



Para obter a aceleração em cada ponto, temos de determinar qual é a força resultante que actua na bola em cada um desses pontos e aplicae a 2.^{a} lei de Newton $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$, em que m é a massa da bola. Em todos os pontos as forças que actuam na bola são a Força gravítica e a força que a rampa exerce na bola. Estas forças, em cada ponto possuem as orientações seguintes:

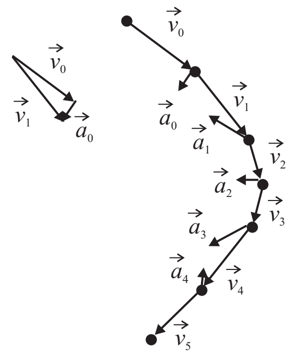


Note-se que estamos a supor que o ponto D está colocado numa região da rampa com declive não nulo. Como consequência, a aceleração da bola em cada um dos pontos é a indicada na figura seguinte.

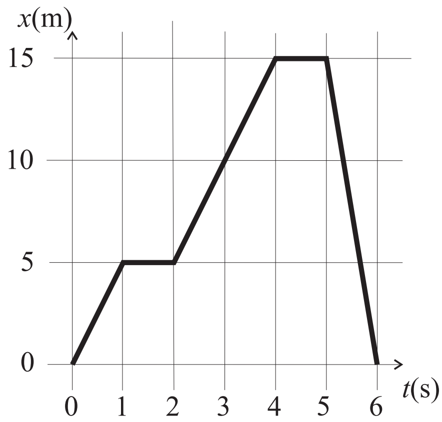


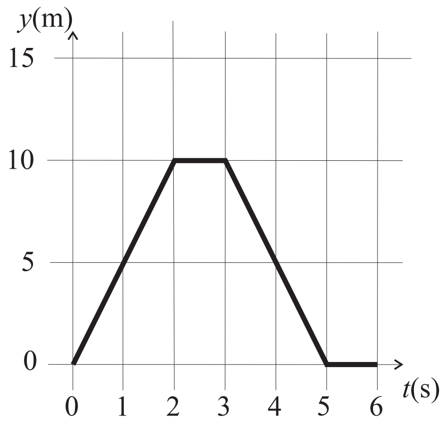
Q4 - Complete o diagrama de movimento para a trajectória indicada, desenhando os vectores velocidade e aceleração em cada ponto.

Vamos utilizar a relação $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ para obter a aceleração em cada ponto. Por exemplo, $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t}$. A direcção, sentido e módulo relativo dos vectores aceleração podem ser obtidos a partir da diferença de dois vectores velocidade. No entanto, as dimensões do vector aceleração são, como sabemos, diferentes das dos vectores velocidade.



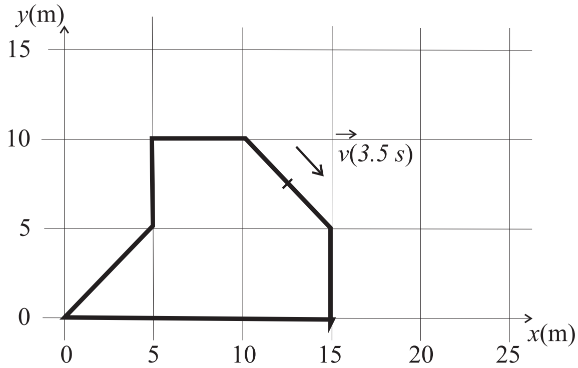
Q5 - Os dois gráficos seguintes apresentam os valores de x em função de t e de y em função de t, respectivamente, para uma partícula que se move no plano $x0y$.





a) Utilize o terceiro gráfico para desenhar a função $y = y(x)$ correspondente à trajectória dessa partícula.

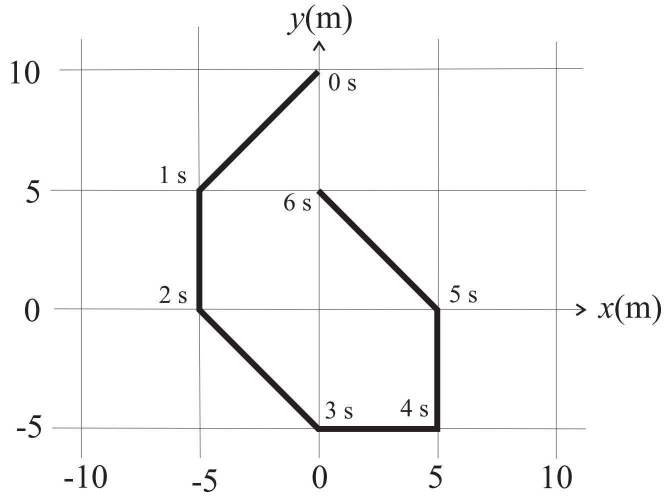
b) No mesmo gráfico desenhe o vector velocidade da partícula no instante $t = 3.5$ s.



Q6 - O gráfico mostra a trajectória de uma partícula. Os pontos indicam as posições da partícula em intervalos de 1 s. Entre cada ponto, a velocidade da partícula é constante,

a) Desenhe os gráficos de x em função de t e de y em função de t, respectivamente, para o movimento da partícula.

b) O módulo da velocidade da partícula entre os instantes $t = 5\,\mathrm{s}$ e $t = 6\,\mathrm{s}$ é maior, menor ou igual à velocidade da partícula entre os instantes $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$? Justifique.



Q7 - Uma pedra, deixada cair do alto do mastro de um barco à vela, embaterá no mesmo ponto da coberta quer o barco esteja parado ou em movimento com velocidade constante?

Q8 - Um projéctil é lançado na Terra com uma determinada velocidade inicial. Outro projéctil é lançado na Lua com a mesma velocidade inicial. Despreze a resistência do ar (na Terra, claro).A aceleração da gravidade na Lua é 1.6 m s^{-2}.

a) Qual dos dois objectos tem o alcance maior?

O alcance é a distância, medida na horizontal, do ponto de lançamento ao ponto em que o objecto volta a ter a altura igual à que tinha no ponto de lançamento. Intuitivamente, a resposta será que o alcance será maior na Lua do que na Terra, visto que a componente horizontal da velocidade (que é constante durante todo o movimento) é igual nos dois casos e a aceleração (que tem direcção vertical e sentido para baixo) possui módulo menor na Lua do que na Terra. Repare-se que a velocidade inicial (módulo e ângulo que faz com o eixo dos x- horizontal) é igual nos dois casos. Mas o melhor é verificarmos quantitativamente. Para isso, um bom processo é obtermos a equação da trajectória.

Colocamos a origem do sistema de eixos (x - horizontal e apontando no sentido do movimento do corpo; y- vertical e apontando para cima. Recorde-se que esta escolha é arbitrária e não influencia o resultado do problema). A velocidade inicial é $\vec{v}_0$ e tem componentes positivas segundo os dois eixos de referência.

A equação do movimento (que é uniformemente acelerado) é

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2,$$

em que $\vec{r}$ é o vector posição do projéctil no instante t, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ e $\vec{a}$ é a aceleração, constante, do projéctil durante o movimento.

A escolha que fizemos do sistema de referência implica $\vec{r}_0 = 0$ e $\vec{a} = -g\vec{j}$. As equações escalares correspondentes a esta equação vectorial são

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Se eliminarmos o tempo entre estas duas equações, obtemos uma equação do tipo $y = y(x)$, que é a equação da trajectória.

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_{0x}} \\ y &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2. \end{aligned}$$

A equação da trajectória é a a euação de uma parábola.

O ponto de lançamento, $(x = 0, y = 0)$, é, evidentemente solução desta equação. O ponto em que o projéctil atinge de novo a altura de que partiu, corresponde ao outro ponto da trajectória com $y = 0$. O valor de x dar-nos-á a distância horizontal à origem, a que chamamos alcance. Substituindo, então $y = 0$ na equação da trajectória, obtemos

$$0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2.$$

As soluções desta equação (ou seja, os valores de x que a satisfazem) são $x = 0$ (como esperávamos, corresponde ao ponto de partida do projéctil) e

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \\ &= \frac{2v_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0}{g}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, obtemos $\sin(2\theta_0) = 2\sin\theta_0 \cos\theta_0$ o que nos permite escrever a equação anterior na forma

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}.$$

Comparando agora este valor de x na Terra e na Lua, obtemos, para os mesmos valores de v_0 e θ_0,

$$\frac{x_{\text{Lua}}}{x_{\text{Terra}}} = \frac{g_{\text{Terra}}}{g_{\text{Lua}}}.$$

A nossa intuição estava correcta, o alcance é maior na Lua do que na Terra. (Nem sempre acontece assim, isto é, as nossas ideias intuitivas nem sempre estão correctas.)

b) Qual dos dois atinge a maior altitude?

Podemos obter a altura máxima atingida por um objecto lançado nas condições indicadas, calculando o tempo necessário para a subida (fazendo $v_y = 0$ na equação $v_y = v_{0y} - gt$ e substituindo-o na equação da coordenada y da posição, em função do tempo. $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.) Obtemos $t_{\text{subida}} = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$, que é o resultado que pretendemos.

Alternativamente, podemos obter o valor de y correspondente ao ponto mais alto da trajectória, ddiferenciamdo a equação da trajectória em ordem a x e igualando a zero. Obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x$$

Igualando a zero,

$$\begin{aligned} \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x &= 0 \\ x &= \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}. \end{aligned}$$

Substituindo este valor de x na equação da trajectória, chegamos a

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} - \frac{g}{2 v_{0x}^2} \left(\frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} \\ &= \frac{v_{0y}^2}{2g}, \end{aligned}$$

como anteriormente.

Concluímos, portanto que

$$\frac{y_{\text{max}_{\text{Lua}}}}{y_{\text{max}_{\text{Terra}}}} = \frac{g_{\text{Terra}}}{g_{\text{Lua}}}.$$

A altura máxima é maior na Lua do que na Terra

Q9 - Um projéctil é lançado com velocidade inicial fazendo um ângulo entre 0^o e 90^o com a horizontal.

a) Existe algum ponto da trajectória em que os vectores velocidade, $\vec{v}$, e aceleração, $\vec{a}$, sejam paralelos um ao outro? Em caso afirmativo, caracterize esse ponto.

b) Existe algum ponto da trajectória em que os vectores velocidade, $\vec{v}$, e aceleração, $\vec{a}$, sejam perpendiculares um ao outro? Em caso afirmativo, caracterize esse ponto.

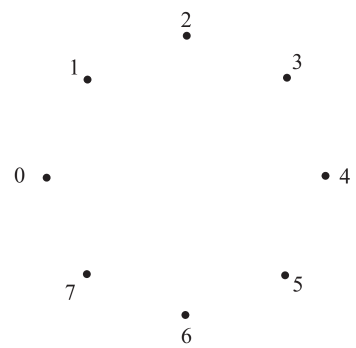
c) Quais das seguintes grandezas permanecem constantes ao longo da trajectória: x, y, $|\vec{v}|$, v_x, v_y, a_x, a_y?

Q10 - O veio de distribuição de um determinado automóvel roda com velocidade angular de 3000 rpm (rotações por minuto). Qual é o valor da velocidade angular em revoluções por segundo?

Q11 - A figura mostra os pontos do diagrama de movimento de um objecto com movimento circular uniforme. Complete o diagrama:

a) Desenhe os vectores velocidade instantânea, $\vec{v}$, em cada ponto indicado.

b) Noutra cor, desenhe os vectores aceleração instantânea, $\vec{a}$, em cada ponto indicado.



Q12 - A figura mostra três pontos num prato que roda com velocidade angular constante em torno de um eixo central.

a) Desenhe os vectores velocidade em cada um dos pontos indicados.

Os vectores velocidade são tangentes à trajectória em cada ponto e apontam no sentido do deslocamento. Estão indicados na seguna figura.

b) Coloque por ordem, do maior para o menor, os módulos das vectores velocidade, em cada um dos pontos indicados.

No movimento circular uniforme, a velocidade angular, ω, pode definir-se como o ângulo descrito pelo vector posição de um ponto, referido ao centro de rotação, num intervalo de tempo a dividir por esse intervalo de tempo.É evidente que a velocidade angular é igual para os três pontos indicados (na realidade é a mesma para todos os pontos do prato).

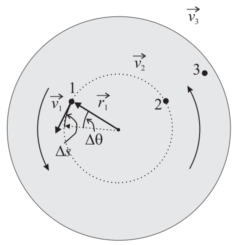
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para um determinado ponto do prato (por exemplo, o ponto 1, cuja posição em relação ao centro é definida em cada instante pelo vector $\vec{r}_1$,

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r_1},$$

em que Δs é o arco na trajectória do ponto 1 correspondente ao ângulo ao centro $\Delta\theta$, e

$$\omega = \frac{1}{r_1}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Mas

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = |\vec{v}_1|\,,$$

pelo que podemos escrever

$$\omega = \frac{v_1}{r_1}.$$

Repetindo o raciocínio para qualquer outro ponto, concluímos que, genericamente,

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \text{ou} \quad v = \omega r.$$

Consequentemente podemos ordenar as velocidades de acordo com os seus módulos:

$$v_1 = v_2 < v_3.$$

Q13 - Num barco que se desloca com velocidade constante de módulo 5 m/s em relação à água, um passageiro anda para a popa do barco com velocidade de módulo 2 m/s em relação ao barco.

a) Escreva a equação que lhe permite obter a velocidade do passageiro em relação à água.

Vamos considerar dois referenciais, um ligado à água (que chamamos, *arbitrariamente*, referencial fixo, S, e outro ligado ao barco, que denominamos referencial móvel, S'). A velocidade do referencial S' em relação ao referencial S é a velocidade do barco em relação à água, que poderemos chamar $\vec{u}$. Chamaremos $\vec{v}$ à velocidade do passageiro em relação à água (isto é, ao referencial S) e $\vec{v}'$ à velocidade do passageiro em relação ao barco (isto é, ao referencial S'). A equação que permite obter a velocidade do passageiro em relação à água é, portanto,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

b) Substitua os valores apropriados na equação, de modo a obter o valor dessa velocidade. (não se esqueça que a grandeza velocidade é vectorial).

Todos os vectores que figuram na equação possuem a mesma direcção. Como o passageiro se desloca para a popra do berco, o sentido de v' é opsto ao de $\vec{u}$. A equação escalar correspondente, tomando (arbitrariamente) o sentido de $\vec{u}$ (velocidade da água) como sentido positivo, é

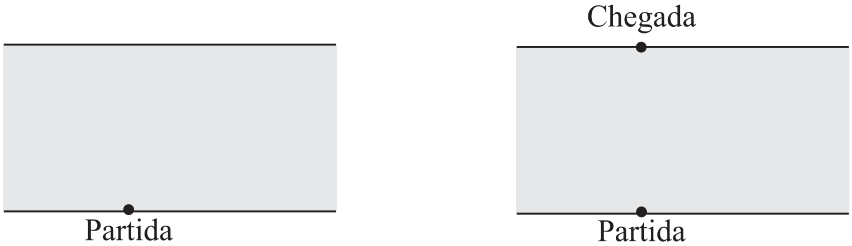
$$v = -v' + u.$$

Substituindo os valores dados, $u = 5\,\mathrm{m/s}$ e $v' = 2\,\mathrm{m/s}$, obtemos o módulo da velocidade do passageiro em relação à água,

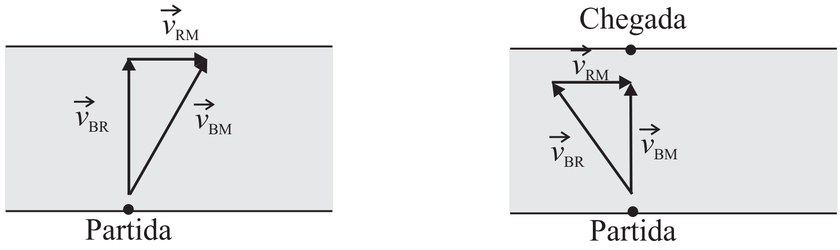
$$\begin{aligned} v &= -2\,\mathrm{m/s} + 5\,\mathrm{m/s} \\ &= 3\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Como este valor é positivo, o vector $\vec{v}$ tem o sentido de $\vec{u}$.

Q14 - Um barco está a atravessar um rio, deslocando-se com velocidade de módulo 5 m/s em relação à água. O rio possui uma corrente com velocidade de módulo 3 m/s, em relação à margem, no sentido da esqueda para a direita das figuras. Na situação (a), o barco aponta verticalmente em relação às margens do rio e é arrastado pela corrente. Na situação (b), o barco aponta obliquamente em relação às margens, no sentido de onde vem a corrente, com o ângulo necessário para que possa atravessar o rio numa trajectória perpendicular às margens. Para cada situação, desenhe os vector velocidade, $\vec{v}_{\mathrm{RM}}$, do rio em relação à margem, $\vec{v}_{\mathrm{BR}}$, do barco em relação ao rio e ,$\vec{v}_{\mathrm{BM}}$, do barco em relação à margem.



(a) (b)



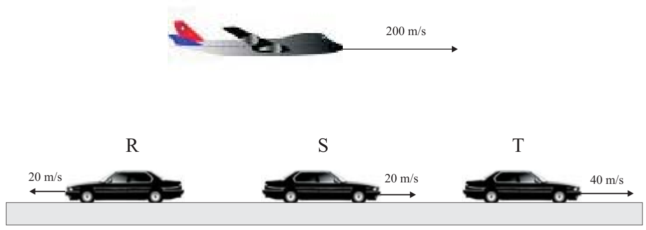
(a) (b)

Q15 - O Rui, a Sandra e o Tomás conduzem os seus automóveis em trajectórias rectilíneas colineares e com velocidades constantes. Num dado instante, observam um avião a jacto que se desloca na mesma direcção com velocidade instantânea de módulo 200 m/s e aceleração de módulo 5 m/s^2.

a) Ordene, da maior para a menor, os valores da velocidade do avião a jacto, do ponto de vista do Rui, da Sandra e do Tomás. Justifique.

b) Ordene, da maior para a menor, os valores da aceleração do avião a jacto, do ponto de vista do Rui, da Sandra e do Tomás. Justifique.

Recorde que como os movimentos são unidimensionais e a direcção é comum, as velocidades e as acelerações podem ser expressas por escalares. Considere como positivo o sentido da velocidade do avião a jacto.



Q16 - Um passageiro, num comboio que viaja com velocidade constante em relação ao solo, deixa cair uma colher. Qual a aceleração da colher relativamente a) ao comboio e b) ao solo?

Problemas:

Nestes problemas, os vectores unitários que definem a direcção e sentido dos eixos coordenados x, y, z são denominados, respectivamente, por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

P1 - Uma mulher acrobata está sentada num ramo de uma árvore e deseja cair verticalmente sobre um cavalo a galope que passa sob a árvore. A velocidade do cavalo é 10.0 m s^{-1}, e a distância do ramo à sela é 3.00 m.

a) Qual deve ser a distância horizontal entre a sela e o ramo quando a mulher cai?

A mulher acrobata deverá iniciar o movimento de queda antes de o cavalo passar na vertical do ramo em que se encontra. Durante o tempo de queda, o cavalo percorre uma determinada distância, que é o resultado que pretendemos. Vamos colocar a origem do sistema de referência $x0y$ na posição em que se encontra a sela do cavalo no instante em que a mulher inicia a queda, e fazemos $t = 0$ s nesse momento.

Neste sistema de referência a coordenada - x da posição do cavalo é

$$x_{\rm c} = v_{\rm c} t \tag{1}$$

em que $v_{\rm c}$ é o módulo da velocidade do cavalo (esta velocidade só possui componente não nula segundo o eixo dos x. No mesmo sistema de referência, as coordenadas x e y da posição da mulher acrobata são

$$\begin{cases} x = x_{\rm m} \\ y = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{2}$$

em que h é a distância do ramo à sela quando o cavalo está directamente sob ao ramo. $h = 3.00$ m e $g = 10.$ m s^{-2}. $x_{\rm m}$ dar-nos-á o resultado que pretendemos. Se $t_{\rm queda}$ é igual ao tempo de queda da acrobata, então, como no instante $t_{\rm queda}$ o cavalo estará directamente sob o ramo,

$$v_{\rm c} t_{\rm queda} = x_{\rm m} \tag{3}$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \tag{4}$$

Eliminando t entre as equações (3) e (4), obtemos

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{x_{\rm m}}{v_{\rm c}} \right)^2$$

ou

$$\begin{aligned} x_{\rm m} &= \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} v_{\rm c} \\ &= \left(\frac{2 \times 3.0\,\rm m}{10.\,\rm m/\,s^2} \right)^{1/2} 10.0 \\ &= 7.75\,\rm m \end{aligned}$$

que é a distância na horizontal entre a sela e o ramo.

b) Quanto tempo está ela no ar?

O intervalo de tempo de queda obtém-se da equação (4), $h - \dfrac{1}{2} g t^2 = 0$:

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2 \times 3.0\,\rm m}{10.\,\rm m/\,s^2} \right)^{1/2} \\ &= 7.75 \times 10^{-1}\,\rm s. \end{aligned}$$

P2 - Um peixe que nada num plano horizontal tem velocidade $\vec{v}_0 = (4.0\,\vec{i} + 1.0\,\vec{j})$ m s^{-1} num ponto do oceano onde o seu vector posição em relação a uma rocha fixa no porto é $\vec{r}_0 = (1.0\,\vec{i} - 4.0\,\vec{j})$ m. Depois de o peixe nadar com aceleração constante durante 20.0 s, a sua velocidade é $\vec{v} = (20.0\,\vec{i} - 5.0\,\vec{j})$ m s^{-1}.

a) Quais as componentes da aceleração?

Como o movimento é uniformemente acelerado, com aveleração $\vec{a}$, a relação entre as velocidades no instante t e no instante $t = 0$ é $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, de onde se obtém

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \\
&= \frac{(20.0\,\vec{i} - 5.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s} - (4.0\,\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s}}{20.0\,\mathrm{s}} \\
&= \left(\frac{16.0}{20.0}\,\vec{i} + \frac{-6.0}{20.0}\vec{j}\right)\,\mathrm{m/\,s^2} \\
&= \left(0.80\,\vec{i} - 0.30\vec{j}\right)\,\mathrm{m/\,s^2}.
\end{aligned}$$

As componentes da aceleração são, assim,

$$\begin{aligned}
a_x &= 0.80\,\mathrm{m/\,s^2} \\
a_y &= -0.30\,\mathrm{m/\,s^2}
\end{aligned}$$

b) Qual a direcção da aceleração em relação ao eixo do x?

A direcção da aceleração em relação ao eixo dos x é dada por

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan\frac{a_y}{a_x} \\
&= \arctan\frac{-0.30}{0.80} \\
&= -0.\,36\ \mathrm{rad.}
\end{aligned}$$

c) Onde está o peixe no instante $t = 25$ s e em que direcção se move?

Para obter a posição do peixe num determinado instante t, utilizamos a equação da posição

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\
&= (1.0\,\vec{i}\ -\ 4.0\,\vec{j})\,\mathrm{m} + (4.0\,\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s} \times 25\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\left[\left(0.80\,\vec{i} - 0.30\vec{j}\ \right)\right]\,\mathrm{m/\,s^2} \times (25\,\mathrm{s})^2 \\
&= \left(3.5 \times 10^2\,\vec{i}\ - 7.3 \times 10\,\vec{j}\right)\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

A velocidade nesse instante é

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\
&= (4.0\,\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s} + \left[\left(0.80\,\vec{i} - 0.30\vec{j}\ \right)\,\mathrm{m/\,s^2}\right] \times 25\,\mathrm{s} \\
&= \left(2.4 \times 10\,\vec{i}\ - 6.\,5\,\vec{j}\right)\,\mathrm{m/\,s}
\end{aligned}$$

A direcção segundo a qual o peixe se move é a da sua velocidade nesse instante, que faz um ângulo

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan\frac{-6.\,5}{2.4 \times 10} \\
&= -0.\,26\ \mathrm{rad}
\end{aligned}$$

P3 - As coordenadas de um objecto que se move no plano $x0y$ variam no tempo, de acordo com as equações: $x = (-5.0 \sin t)$ m e $y = (4.0 - 5.0 \cos t)$ m, onde t está em s.

a) Determine as componentes da velocidade e da aceleração em $t = 0$ s.

As coordenadas da posição da partícula e correspondenres derivadas são, com t em segundo.

$x = (-5.0 \sin t)$ m

$y = (4.0 - 5.0 \cos t)$ m

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = -5.0 \cos t = -5.0$ m s^{-1}

$v_y = \dfrac{dy}{dt} = 5.0 \sin t = 0$ m s^{-1}

$a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 5.0 \sin t = 0$ m s^{-2}

$a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 5.0 \cos t = 5.0$ m s^{-2}

b) Escreva expressões para o vector posição, o vector velocidade, e o vector aceleração para qualquer instante $t > 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= -5.0 \sin t \, \vec{i} + (4.0 - 5.0 \cos t) \, \vec{j} \text{ m} \\
\overrightarrow{v} &= \left(-5.0 \cos t \, \vec{i} + 5.0 \sin t \, \vec{j}\right) \text{ m/ s} \\
\overrightarrow{a} &= \left(5.0 \sin t \, \vec{i} + 5.0 \cos t \, \vec{j}\right) \text{ m/ s}^2
\end{aligned}$$

c) Descreva a trajectória do objecto num gráfico $x0y$.

Eliminamos o tempo entre x e y, obtendo

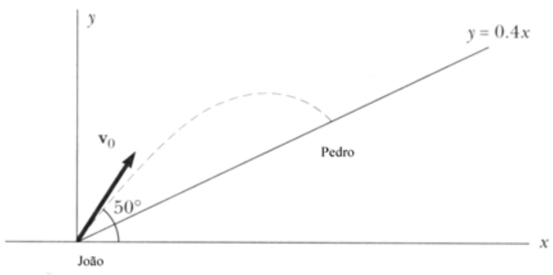
$$\begin{aligned}
\sin t &= \frac{x}{-5} \\
\cos t &= \frac{y - 4.0\,\text{m}}{-5.0\,\text{m}}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{25\,\text{m}^2} + \frac{(y - 4.0\,\text{m})^2}{25\,\text{m}^2} &= 1 \\
x^2 + (y - 4.0\,\text{m})^2 &= (5\,\text{m})^2 .
\end{aligned}$$

A trajectória é uma circunferência de raio 5 m, centrada no ponto $x = 0$; $y = 4.0\,$m.

P4 - O João está na base de um monte, enquanto o Pedro está 30 m acima na encosta do monte. O João está na origem de um sistema de coordenadas $x0y$, e a linha que descreve a encosta do monte é dada pela equação, $y = 0.4\,x$, como se mostra na figura. Se o João atirar uma maçã ao Pedro segundo um ângulo de 50^o em relação à horizontal, com que velocidade deve atirá-la para que aquele a apanhe?



Vamos supor que 30 m é a distância de João ao Pedro ao longo da encosta (como sugere o enunciado). Se x_P e y_P são as coordenadas de da posição do Pedro, então

$$x_\mathrm{P}^2 + y_\mathrm{P}^2 = (30\,\mathrm{m})^2 \tag{5}$$

Por outro lado, como a encosta é dada por $y = 0.4x$ e $(x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ está sobre esta linha, temos também

$$y_\mathrm{P} = 0.4 x_\mathrm{P} \tag{6}$$

de onde, substituindo a eq. (6) na eq. (5),

$$\begin{aligned}
x_\mathrm{P}^2 + 0.4^2 x_\mathrm{P}^2 &= (30\,\mathrm{m})^2 \\
x_\mathrm{P}^2 &= \frac{(30\,\mathrm{m})^2}{1+0.4^2} \\
x_\mathrm{P} &= \frac{30\,\mathrm{m}}{\sqrt{1+0.4^2}} \\
&= 27.\,9\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{P} &= 0.4 \times 27.9\,\mathrm{m} \\
&= 11.\,2\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

A trajectória da maçã atirada pelo João tem de passar pelo ponto $(27.9, 11.2)$ m.

A equação da trajectória obtém-se de

$$\begin{aligned}
x &= v_{0x} t = v_0 t \cos 50^\circ \\
y &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \operatorname{sen} 50^\circ - \frac{g}{2} t^2
\end{aligned}$$

Eliminando t entre estas equações, temos, com $g = 5.0\,\mathrm{m/\,s^2}$

$$\begin{aligned}
t &= \frac{x}{v_0 \cos 50^\circ} \\
y &= x \frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 50^\circ} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 50^\circ}
\end{aligned}$$

ou

$$y = x \tan 50^\circ - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 50^\circ}$$

e, por conseguinte, substituindo nesta equação as duas coordenadas de posição do Pedro,

$$\begin{aligned}
11.2\,\mathrm{m} &= (27.9\,\mathrm{m}) \tan 50^\circ - \left(5.0\,\mathrm{m/\,s^2}\right) \frac{(27.9\,\mathrm{m})^2}{v_0^2 \cos^2 50^\circ} \\
\frac{(27.9\,\mathrm{m})^2}{v_0^2 \cos^2 50^\circ} &= \frac{(27.9\,\mathrm{m})}{(5.0\,\mathrm{m/\,s^2})} \tan 50^\circ - \frac{11.2\,\mathrm{m}}{(5.0\,\mathrm{m/\,s^2})} \\
v_0 &= 20.7\,\mathrm{m/\,s}
\end{aligned}$$

P5 - O super-homem sobrevoa Paris ao nível do topo das árvores quando vê que um elevador da Torre Eiffel começa a cair devido ao cabo se ter partido. A sua visão de raios X diz-lhe que Lois Lane está lá dentro. Se o super-homem está a 1.00 km da Torre Eiffel, e o elevador cai de uma altura de 240 m, quanto tempo tem ele para salvar Lois, e qual deve ser a sua velocidade média.

O super-home deverá deslocar-se da sua posição inicial até à base da Torre Eiffel com velocidade média tal que consiga alcançar Lois Lane antes desta atingir o solo. Podemos ober o tempo de queda de Lois Lane utilizando a equação da sua posição em função do tempo

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Se colocarmos a origem do eixo dos y (vertical na base da Torre Eiffel, isto é, no ponto em que a Lois Lane atinge o solo) teremos $y = 0$, $v_0 = 0$, $y_0 = h = 240\,\mathrm{m}$ e $g = 10\,\mathrm{m/\,s^2}$, ou (com $g = 10\,\mathrm{m/\,s^2}$),

$$\begin{aligned} 0 &= h - \frac{1}{2} g t^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 240\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/\,s^2}}} \\ &= 6.9\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

A velocidade média do super-homem, para atingir Lois Lane antes de esta atingir o solo deverá ter pelo menos o módulo

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \frac{1.00 \times 10^3\,\mathrm{m}}{6.9\,\mathrm{s}} \\ &= 1.45 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s}. \end{aligned}$$

P6 - Um jogador de futebol chuta uma pedra, horizontalmente, da borda de uma falésia com 40.0 m de altura, para um lago de água. Se o jogador ouvir o som do "chape" 3.0 s depois do chuto, qual a velocidade inicial da pedra? Utilize para módulo da velocidade do som no ar o valor 343 m s^{-1}.

Escolhendo um sistema de eixos, com origem no ponto em que a pedra é chutada, com o eixo dos x horizontal e o eixo dos y vertical orientado para cima, a velocidade inicial da pedra é $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}$. Se a altura da falésia é h e o ponto em que a pedra toca na água dista ℓ da falésia na horizontal, esse ponto tem, neste referencial, as coordenadas:

$$x = \ell;\ y = -h$$

As equações do movimento da pedra, neste referencial são

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

a partir das quais, eliminando t entre as duas equações, obtemos a equação da trajectória da pedra:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

Utilizando agora os valores das coordenadas do ponto de impacto na água, obtemos

$$h = \frac{1}{2} g \frac{\ell^2}{v_0^2} \tag{7}$$

A distância do ponto de impacto à beira da falésia é

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{h^2 + \ell^2} \\ &= (343\,\mathrm{m/\,s}) \times 3.0\,\mathrm{s} \\ &= 1.03 \times 10^2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \ell^2 &= d^2 - h^2 \\ &= \left(1.03 \times 10^2\,\mathrm{m}\right)^2 - (40.0\,\mathrm{m})^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{\left(1.03 \times 10^2\,\mathrm{m}\right)^2 - (40.0\,\mathrm{m})^2} \\ &= 94.9\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Fianalmente, utilizando a equação (7), obtemos, com $g = 10.0\,\mathrm{m/\,s^2}$

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{\ell^2}{h}} \\ &= \sqrt{\frac{(10\,\mathrm{m/\,s^2}) \times (94.9\,\mathrm{m})^2}{2 \times 40\,\mathrm{m}}} \\ &= 33.6\,\mathrm{m/\,s} \end{aligned}$$

Daqui resulta que a velocidade inicial é

$$\vec{v}_0 = 33.6\ \vec{i}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

P7 - Uma pulga pode saltar verticalmente até uma altura h.
a) Qual é a distância horizontal máxima que ela pode saltar?
b) Qual o tempo que ela leva no ar nos dois casos?

No movimento vertical temos $v_y = v_{0y} - gt$ e $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. A altura máxima corresponde à posição y no instante em que $v_y = 0$. Da equação da velocidade obtemos

$$t_{\mathrm{sub}} = \frac{v_{0y}}{g},$$

que, substituindo na equação da posição resulta em

$$\begin{aligned} h &= \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}. \end{aligned}$$

Nesta caso, o valor absoluto da velocidade inicial é $v_0 = v_{0y}$ e, portanto,

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

b) Qual o tempo que ela leva no ar nos dois casos?

Se a velocidade inicial faz um ângulo θ_0 com o eixo dos x, o alcance horizontal obtem-se de

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

fazendo $y = 0$, obtendo-se

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t = 0$$

ou $t = 0$ (correspondendo ao instante de partida) e $t = \dfrac{2v_{0y}}{g}$ ou

$$t_{\text{voo}} = 2t_{\text{sub}}.$$

O alcance horizontal é dado pelo valor de x correspondente a $t = t_{\text{voo}}$:

$$\ell = v_{0x}t_{\text{voo}}$$

ou

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \\ &= \frac{2v_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g} \end{aligned}$$

utilizando $\sin 2\theta_0 = \sin(\theta_0 + \theta_0) = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$.

Se o valor absoluto da velocidade inicial for definido, entaõ o valor máximo do alcance horixonatal obtem encontrando o valor de θ_0 para o qual

$$\frac{d\ell}{d\theta_0} = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}2\cos 2\theta_0 = 0$$

de onde

$$2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Então se o valor absoluto da velocidade inicial da pulga for o encontrado na alínea anterior, temos, com $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{v_0^2\sin\frac{\pi}{2}}{g} \\ &= \frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

P8 - Uma bola ligada à extremidade de um fio é posta a rodar no ar segundo uma circunferência horizontal de raio 0.30 m. O plano da circunferência está 1.2 m acima do chão. A corda parte-se e a bola aterra 2.0 m afastada do ponto no chão directamente por baixo da sua posição quando a corda parte. Determine o módulo da aceleração centrípeta da bola durante o seu movimento circular.

A velocidade horizontal da bola é segundo o eixo dos x (horizontal), ou $v_0 = v_{0x}$. Se o sistema de tiver origem no ponto em que a bola se encontra quando a corda se parte e o eixo dos y for dirigido para cima,

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

A trajectória da bola é

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Então, $y = -1.2\,\mathrm{m}$ quando $x = 2.0\,\mathrm{m}$,

$$\begin{aligned} -1.2\,\mathrm{m} &= -\frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2v_{0x}^2}(2.0\,\mathrm{m})^2 \\ v_{0x} &= v_0 = 4.1\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Este é o módulo da velocidade da bola durante o movimento circular uniforme, correspondendo à aceleração centrípeta com módulo

$$\begin{aligned} a_\mathrm{c} &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(4.1\,\mathrm{m/s})^2}{0.30\,\mathrm{m}} \\ &= 56.0\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

P9 - Um comboio trava ao contornar uma curva apertada, passando de 90.0 km h^{-1} para 50.0 km h^{-1} nos 15.0 s que demora a dar a curva. O raio da curva é 150 m. Calcule a aceleração do comboio no momento em que a sua velocidade comboio atinge o valor de 50 km h^{-1}.

O módulo da velocidade inicial do comboio é

$$\begin{aligned} v_0 &= 90.0\,\mathrm{km/h} \\ &= \frac{9.00\times 10^4\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} \\ &= 25.0\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

No final da curva esse valor é de

$$\begin{aligned} v &= 50.0\,\mathrm{km/h} \\ &= \frac{5.00\times 10^4\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} \\ &= 13.9\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

A componente tangencial da aceleração do comboio durante a curva é de

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{T}} &= \frac{(13.9 - 25.0)\ \mathrm{m/\,s}}{15.0\,\mathrm{s}} \\
&= -0.74\,\mathrm{m/\,s}^2.
\end{aligned}
$$

A componente radial da aceleração no fim da curva é

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{R}} &= \frac{v^2}{r} \\
&= \frac{(13.9\,\mathrm{m/\,s})^2}{150\,\mathrm{m}} \\
&= 1.\,29\,\mathrm{m/\,s}^2.
\end{aligned}
$$

A aceleração pedida é

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= a_{\mathrm{R}}\vec{R} + a_{\mathrm{T}}\vec{T} \\
&= \left(1.\,29\vec{R} + -0.74\vec{T}\right)\ \mathrm{m/\,s}^2.
\end{aligned}
$$

P10 - A Joana conduz o seu Mercedes com uma aceleração de módulo $(3.0\,\vec{i} - 2.0\,\vec{j})$ m s^{-2} enquanto que a Sofia imprime ao seu Jaguar uma aceleração de módulo $(1.0\,\vec{i} + 3.0\,\vec{j})$ m s^{-2}. Ambas partem do repouso da origem de um sistema de coordenadas xy. Passados 5 s,

a) qual é a velocidade da Joana em relação à Sofia?

No referencial ligado ao chão e com origem no ponto de partida do movimento,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{a}t \\
\vec{r} &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2
\end{aligned}
$$

Então, em relação ao solo, as velocidades da Joana e da Sofia são, com t em segundo,

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{\mathrm{J}} &= \left[(3.0\,\vec{i} - 2.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s}^2\right] t \\
\vec{v}_{\mathrm{S}} &= \left[(1.0\,\vec{i} + 3.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s}^2\right] t
\end{aligned}
$$

A velocidade da Joana em relação à Sofia é

$$
\vec{v}_{\mathrm{J}} - \vec{v}_{\mathrm{S}} = \left[\left(2.0\,\vec{i} - 5.0\,\vec{j}\right)\ \mathrm{m/\,s}^2\right] t
$$

No instante $t = 5\,\mathrm{s}$, a velocidade relativa é

$$
\vec{v}_{\mathrm{J}} - \vec{v}_{\mathrm{S}} = 10.0\,\vec{i} - 25.0\,\vec{j}\ \ (\mathrm{m/\,s})\,.
$$

b) a que distância estão uma da outra?

A posição de Joana é dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{J}} &= \frac{1}{2}\vec{a}_{\mathrm{J}}t^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[(3.0\,\vec{i} - 2.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s}^2\right] t^2
\end{aligned}
$$

enquanto que a posição da Sofia é dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\mathrm{S}} &= \frac{1}{2}\vec{a}_{\mathrm{S}}t^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(1.0\,\vec{i}+3.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s^2}\right]t^2.\end{aligned}$$

No instante $t = 5$ s,

$$\vec{r}_{\mathrm{J}} = \left(37.5\,\vec{i} - 25.0\,\vec{j}\right)\ \mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{S}} = \left(12.5\,\vec{i} + 37.5\,\vec{j}\right)\ \mathrm{m}$$

A distância entre as duas é

$$\begin{aligned}\ell &= \sqrt{(x_{\mathrm{J}}-x_{\mathrm{S}})^2+(y_{\mathrm{J}}-y_{\mathrm{S}})^2} \\ &= \sqrt{[(37.5-12.5)\ \mathrm{m}]^2+[(-25-37.5)\ \mathrm{m}]^2} \\ &= 67.3\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

c) qual é a aceleração da Joana relativamente à Sofia?
A aceleração da Joana em relação à Sofia é

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\mathrm{J}}-\vec{a}_{\mathrm{S}} &= (3.0\,\vec{i}-2.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s^2}-(1.0\,\vec{i}+3.0\,\vec{j})\,\mathrm{m/\,s^2} \\ &= \left(2.0\,\vec{i}-5.0\,\vec{j}\right)\ \mathrm{m/\,s^2}.\end{aligned}$$

Repare-se que o vector posição de Joana no referencial ligado à Sofia é, em geral.

$$\vec{r}_{\mathrm{J}}-\vec{r}_{\mathrm{S}} = (\vec{v}_{0\mathrm{J}}-\vec{v}_{0\mathrm{S}})\,t+\frac{1}{2}\,(\vec{a}_{\mathrm{J}}-\vec{a}_{\mathrm{S}})\,t^2.$$

P11 - Um rio tem uma corrente de 0.500 m s^{-1}. Um estudante nada contra a corrente a distância de 1.00 km e retorna ao ponto inicial. Dado que o estudante pode nadar com a velocidade de 1.20 m s^{-1} em água parada, quanto tempo demora a sua viagem? Compare este valor com o tempo que a viagem duraria se a água estivesse parada.

Vamos considerar o referencial S ligado à margem e o referencial S' ligado à água. A velocidade da corrente é a velocidade de S' em relação a S. O movimento é unidimensional. No 1.^{o} percurso

$$v_1 = v_1' - u,$$

com $u_1 = 0.500$ m s^{-1}. Como o estudante nadou uma distância $\ell = 1.00$ km, temos

$$\ell = v_1't_1 - ut_1$$

No 2.o percurso,

$$v_2 = v_2' + u$$

e

$$\ell = v_2't_2 + ut_2$$

Como $v'_1 = v'_2 = v'$, a velocidade do estudante em relação à água, o tempo total é

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\ell}{v'-u} + \frac{\ell}{v'+u} \\ &= \ell \frac{v'+u+v'-u}{v'^2-u^2} \\ &= \frac{2v'}{v'^2-u^2}\ell \\ &= \frac{2v'\ell}{v'^2\left(1-\dfrac{u^2}{v'^2}\right)} \\ &= \frac{2\ell}{v'}\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\times 1000\,\mathrm{m}}{1.20\,\mathrm{m/s}}\left[1-\frac{(0.50\,\mathrm{m/s})^2}{(1.20\,\mathrm{m/s})^2}\right]^{-1} \\ &= 2.02\times 10^3\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Se não houvesse corrente, o tempo que o estudante levaria seria

$$\begin{aligned} t' &= \frac{2\ell}{v'} \\ &= \frac{2\times 1.000\times 10^3\,\mathrm{m}}{1.20\,\mathrm{m/s}} \\ &= 1.67\times 10^3\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

P12 - Um barco atravessa um rio, de largura $L = 160$ m, em que a corrente tem uma velocidade uniforme de 1.50 m s^{-1}. O piloto mantém a direcção em que aponta o barco perpendicular ao rio e uma velocidade constante de 2.0 m s^{-1} em relação à água.

a) Qual o módulo da velocidade do barco relativamente a um observador parado na margem?

Vamos utilizar a relação

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

e

$$v^2 = v'^2 + u^2$$

de onde

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v'^2+u^2} \\ &= \sqrt{(2.0\,\mathrm{m/s})^2 + (1.50\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 2.5\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

b) A que distância abaixo, no sentido da corrente, da posição inicial está o barco quando atinge a margem oposta?

O tempo que demora a atingir a outra margem é dado por

$$t = \frac{L}{v'}$$

Nesse tempo, o deslocamento no sentido da corrente é

$$\begin{aligned} \ell &= ut \\ &= \frac{u}{v'}L \\ &= \frac{1.50\,\mathrm{m/\,s}}{2.0\,\mathrm{m/\,s}} \times 160\,\mathrm{m} \\ &= 120.\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

P13 - Um carro viaja para leste com velocidade de 50.0 km h^{-1}. Está a cair chuva verticalmente em relação à Terra. Os traços da chuva nas janelas laterais do carro fazem um ângulo de 60.0$^{\mathrm{o}}$ com a vertical. Determine a velocidade das gotas de água da chuva relativamente a) ao carro e b) à Terra.

Se u for o módulo da velocidade do carro em relação à Terra, temos

$$\begin{aligned} u &= \left(50.0 \times 10^{3}\,\mathrm{m}\right)/3600\,\mathrm{s} \\ &= 13.9\,\mathrm{m/\,s}\ . \end{aligned}$$

v' é o módulo da velocidade das gotas de chuva ém relção ao carro. Então, $\dfrac{u}{v'} = \operatorname{sen} 60^\circ$ e

$$\begin{aligned} v' &= \frac{u}{\operatorname{sen} 60^\circ} \\ &= \frac{13.9\,\mathrm{m/\,s}}{\operatorname{sen} 60^\circ} \\ &= 16.\,1\,\mathrm{m/\,s} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{u}{v} = \tan 60^\circ$$

ou

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{\tan 60^\circ} \\ &= \frac{13.9\,\mathrm{m/\,s}}{\tan 60^\circ} \\ &= 8.03\,\mathrm{m/\,s}. \end{aligned}$$

P14 - Um camião segue para norte com uma velocidade constante de 10.0 m s^{-1} numa estrada horizontal. Um rapaz que vai na parte de trás do camião deseja atirar uma bola enquanto o camião se move e apanhar a bola depois do camião ter percorrido 20.0 m. Despreze a resistência do ar.

a) Com que ângulo em relação à vertical deve a bola ser atirada?

0°.

b) Qual deve ser o módulo da velocidade inicial da bola?

No referencial do camião a velocidade inicial é vertical.Como o tempo de voo é $t_{\mathrm{voo}} = \dfrac{20.0\,\mathrm{m}}{10.0\,\mathrm{m/\,s}} = 2.00\,\mathrm{s}$, e de

$$v = v_0 - gt$$

temos

$$t_{\mathrm{voo}} = \frac{2v_0}{g}$$

ou

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{gt_{\mathrm{voo}}}{2} \\ &= \frac{10\,\mathrm{m/\,s^2} \times 2.00\,\mathrm{s}}{2} \\ &= 10.0\,\mathrm{m/\,s} \end{aligned}$$

c) Qual a forma da trajectória da bola vista pelo rapaz?
A trajectória vista pelo rapaz é rectilínea e vertical.

d) Um observador fixo no solo vê o rapaz atirar e apanhar a bola. Determine a forma da trajectória da bola e a sua velocidade inicial para este observador

No referencial ligado à Terra,

$$\vec{r} = v_{0x}t\,\vec{i} + \left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

ou

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Eliminando t entre as duas equações,

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 \\ y &= x\tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0\cos^2\theta_0}x^2 \end{aligned}$$

Para o observador ligado á Terra,

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 10.0\,\mathrm{m/\,s} \\ v_{0y} &= 10.0\,\mathrm{m/\,s} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{(10.0\,\mathrm{m/\,s})^2 + (10.0\,\mathrm{m/\,s})^2} \\ &= 14.1\,\mathrm{m/\,s} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \arctan 1 \\ &= 0.785\,\mathrm{rad.} \end{aligned}$$

Folha de Cálculo:

S1 - A Polícia montou uma operação de "caça" aos excessos de velocidade na estrada. De um carro de polícia colocado atrás de uma placa, um agente mede por radar que a velocidade de um condutor é de 35.0 m s^{-1}. Passados 3 s ele avisa o seu colega que está noutro carro da polícia 100 m adiante, na estrada. O segundo carro de polícia começa a perseguir o condutor 2.00 s após ter recebido o alerta, partindo do repouso e acelerando a 2.00 m s^{-2}.

a) Quanto tempo demora até o condutor ser alcançado?

b) Qual é a velocidade do carro da polícia quando alcança o condutor?

c) Qual é a distância entre o ponto em que o segundo carro da polícia estava inicialmente e o ponto em que o condutor foi alcançado?

S2 - Um vendedor tem de visitar quatro clientes uma vez em cada período de vendas. Os quatro clientes estão em cidades diferentes e o vendedor quer visitar todos eles no tempo mínimo. A distância viajada depende da trajectória escolhida. Que trajectória deverá ele escolher?

Suponha que o vendedor parte da origem O e visita os quatro clientes uma vez, antes de voltar à origem, viajando entre eles em linha recta. Os clientes estão localizados num plano, nos pontos:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{-10}, \mathbf{5}),\ \ \mathbf{B} = (\mathbf{-8}, \mathbf{-7}),\ \ \mathbf{C} = (\mathbf{1}, \mathbf{11}),\ \ \mathbf{D} = (\mathbf{12}, \mathbf{9}).$$

Utilize uma folha de cálculo para calcular o módulo do vector deslocamento para cada troço em linha recta da viagem e a distância total viajada, para diferentes sequências de visita a A, B, C e D. Confronte em cada caso, a distância total viajada com o gráfico da respectiva trajectória. Determine a trajectória que corresponde à menor distância total viajada. Pode encontrar esta trajectória por "força bruta", isto é, experimentando todas as trajectórias possíveis. Quantas tentativas fez até encontrar a trajectória pretendida? Em que ordem deve o vendedor visitar os quatro clientes? Qual o valor da distância então percorrida?

Escolha outros quaisquer quatro pontos e repita o exercício.

S3 - As coordenadas de um projéctil são:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t \\ y &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

onde $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ e $v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$. Fazendo uso destas equações, utilize a folha de cálculo para calcular as coordenadas x e y de um projéctil e as componentes v_x e v_y como funções do tempo. A velocidade inicial e o ângulo de lançamento do projéctil devem ser parâmetros de entrada. Utilize a função gráfico da folha de cálculo para representar as coordenadas x e y em função do tempo. Represente também v_x e v_y em função do tempo.

S4 - Utilize a folha de cálculo para resolver o seguinte problema:

O Benfica está empatado com o Sporting, faltando apenas alguns segundos para o fim do jogo. A equipa do Benfica tem a posse da bola e vai tentar fazer golo. O jogador tem de chutar a bola de uma distância de 47.5 m para enfiar na baliza. Se a trave da baliza tem 3.05 m de altura, com que ângulo e velocidade deve ele chutar a bola para marcar golo? existe apenas

uma solução para este problema? Soluções podem ser encontradas variando os parâmetros e estudando o gráfico de y em função de x.